UNIVERSIDAD DE COLIMA

Facultad de Ciencias

LAS REPRESENTACIONES DEL GRUPO DE ROTACIONES DEL CUBO

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

P R E S E N T A:

ALMA BERENICE ANDRADE RAZO

ASESOR: Dr. RICARDO ALBERTO SAÉNZ CASAS

COLIMA, COL. JUNIO 2012.

A MIS PADRES.

Agradecimientos

Expreso en estas lineas el profundo agradecimiento para todas aquellas personas que colaboraron en la realización de este proyecto. Agradezco a mi asesor y tutor el Dr. Ricardo Alberto Sáenz Casas por su paciencia, dedicación, tiempo, disponibilidad y motivación durante mi estancia en la Facultad de Ciencias y la construcción de esta tesis; a los profesores que tambien participaron en mi formación universitaria y a mis sinodales el Dr. Andres Pedroza y el Dr. Luis Enrique Garza Gaona.

A mi familia, que siempre estuvo apoyandome incondicionalmente para que terminará mis estudios de licenciatura; a mi madre Alma Delia Razo Uribe, por estar conmigo en cada etapa de mi vida, por su paciencia y cariño; a mi padre Froylán Andrade Martinez por su insistencia en que terminara este proyecto, cariño y comprensión de mis malos momentos; a mis hermanos Isela y Juan por el ejemplo que me dieron de terminar una profesión. Tambien agradezco a mis amigos y demás personas que nunca dejaron rendirme pese a las adversidades que se me presentaron y constantemente me brindaron su apoyo.

Índice general

Introducción

En la teoría de grupos, una representación de un grupo G es una descripción de G como transformaciones de otro objeto matemático. De hecho, dicha representación nos da una forma de visualizar a G como un grupo de matrices.

En 1872, Felix Klein estudió la geometría a través del concepto abstracto de grupo y sus acciones en objetos geométricos. De esta forma, definió a la geometría como el estudio de los objetos invariantes bajo una acción dada. Esto es la columna del llamado Programa de Erlangen.

Para 1896, Frobenius definió la noción de caracter de un grupo finito. En su definición original los caracteres aparecen como soluciones de ciertas ecuaciones y, aunque tienen poco parecido a la definición actual, el mismo Frobenius demostró que las trazas de las matrices de las representaciones dadas son los caracteres de dichas representaciones.

La presentación actual de la teoría de representaciones y caracteres la debemos a Schur, alumno doctoral de Frobenius en Berlín. En el siglo XX, la teoría de representaciones se estudió como las formas en las cuales un grupo dado puede actuar en un espacio vectorial.

En este proyecto se darán a conocer los conceptos básicos de dicha teoría para aplicarlos a los grupos simétricos $\mathbb{S}_3$ y $\mathbb{S}_4$. Este último es isomorfo a el grupo de movimientos rígidos del cubo, y entonces actúa naturalmente sobre sus conjuntos de caras, vértices y aristas.

En el capítulo 1 se describirán las definiciones básicas de la teoría de representaciones, además de algunos ejemplos de grupos finitos. En el capítulo 2 se abordará una parte fundamental de la teoría de representaciones: la teoría de caracteres, que facilita la obtención de las representaciones irreducibles de cierto grupo. En el capítulo 3 se desarrollará la teoría estudiada para obtener las representaciones del grupo simétrico $\mathbb{S}_4$. Por último, en el capítulo 4 aplicaremos la teoría de representaciones a la geometría del cubo, en el sentido del programa de Erlangen de Klein.

Capítulo 1

Resultados básicos

En este capítulo estudiaremos las definiciones básicas acerca de la teoría de representaciones, como lo es representación reducible e irreducible, y los tipos de representaciones que puede tener un grupo finito: la trivial, la alternante, la de permutaciones y la regular. En la segunda sección se mostrarán las propiedades de una subrepresentación. También se obtendrá cómo descomponer representaciones en irreducibles. En la sección 3 veremos la descripción de representaciones irreducibles de grupos abelianos finitos y su relación con el análisis de Fourier en grupos finitos abelianos. Por último, se describirán las representaciones del grupo de permutaciones de tres objetos.

1. Definiciones

Una *representación* de un grupo finito G en un espacio vectorial complejo V de dimensión finita es un homomorfismo $\rho : G \longrightarrow GL(V)$, donde $GL(V)$ es el grupo de automorfismos de V; tal mapeo da a V una estructura de un G-módulo, es decir $\rho(g)v = gv$ satisface:

(i) $1v = v$, $v \in V$;

(ii) $(gg^{'})v = g(g^{'}v)$, $g, g^{'} \in G, v \in V$; y

(iii) $g(v_1 + v_2) = g(v_1) + g(v_2)$, $g \in G, v_1, v_2 \in V$.

La dimensión de V es llamada el *grado* de ρ.

Sea (e_i) una base de V y R la matriz de ρ con respecto a esa base; R_s es la matriz de $\rho(s)$ con respecto a su base. Tenemos que $\det(R_s) \neq 0$ y $R_{st} = R_s \cdot R_t$, si $s, t \in G$; y denotamos por $r_{ij}(s)$ a los coeficientes de la matriz R_s entonces los coeficientes de la matriz R_{st} quedan

$$r_{ik}(st) = \sum_j r_{ij}(s) \cdot r_{jk}(t).$$

Sean ρ y ρ' dos representaciones del mismo grupo G en espacios vectoriales V y V', estas representaciones son llamadas *isomorfas* si existe un isomorfismo lineal $\tau : V \to V'$ que transforma ρ en ρ' y satisface la identidad

$$\tau \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ \tau \text{ para todo } s \in G.$$

Cuando ρ y ρ' están dadas en forma de matriz por R_s y R'_s, respectivamente, esto quiere decir que existe una matriz invertible T tal que

$$T \cdot R_s = R'_s \cdot T \text{ para todo } s \in G.$$

Entonces podemos escribir $R'_s = T \cdot R_s \cdot T^{-1}$ y ρ, ρ' tienen el mismo grado.

Un mapeo entre dos representaciones V y W de G es una transformación lineal $\varphi : V \longrightarrow W$ tal que el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "g"] & W \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "\varphi"] & W \end{tikzcd}$$

para cada $g \in G$; es decir $\varphi(g(v)) = g(\varphi(v))$.

Además φ es G-lineal, es decir $\varphi(gv) = g\varphi(v)$.

Una *subrepresentación* de una representación V es un subespacio W de V el cual es invariante bajo G. Sea V un espacio vectorial sobre el campo K, $A : V \to V$ un operador[1] de V y W un subespacio de V. Se dice que W es un *subespacio invariante* bajo A, si Aw está en W para cada uno de los $w \in W$; es decir, Aw está contenido en W.

Una representación ρ es *irreducible* si no tiene subespacios invariantes no triviales W de V, es decir, $\rho(g)w$ no está contenido en W para cada uno de los w en W y $g \in G$.

Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales y un mapeo $\epsilon : V_1 \times V_2 \to W$ a un espacio vectorial W. Para $x_1 \in V_1$ y $x_2 \in V_2$, $\epsilon(x_1, x_2) \mapsto x_1 \otimes x_2$, es llamado el producto tensorial de V_1 y V_2 sí satisface:

(i) $x_1 \otimes x_2$ es lineal en cada una de las variables.

(ii) Si (e_{i_1}) es una base de V_1 y (e_{i_2}) es un base de V_2, la familia de productos $e_{i_1} \otimes e_{i_2}$ es una base de W.

El producto tensorial es denotado por $V_1 \otimes V_2$. Por la condición (ii),

$$\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim(V_1) \cdot \dim(V_2).$$

Ahora sean $\rho^1 : G \to GL(V_1)$ y $\rho^2 : G \to GL(V_2)$ dos representaciones de un grupo G. Para $s \in G$ definimos un elemento $\rho(s)$ de $GL(V_1 \otimes V_2)$ como $\rho(s)(x_1 \otimes x_2) = \rho^1(s)(x_1) \cdot \rho^2(s)(x_2)$, para $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$. Entonces $\rho(s)$ define una representación de G en $V_1 \otimes V_2$, la cual es llamada el *producto tensorial* de ρ^1 y ρ^2 y se denota por $\rho^1 \otimes \rho^2$. Sea (e_{i_1}) una base de V_1 y $r_{i_1 j_1}(s)$ la matriz de ρ^1_s y para V_2 una base es e_{i_2} y $r_{i_2 j_2}(s)$ es la matriz de ρ^2_s entonces

$$\rho^1_s(e_{j_1}) = \sum_{i_1} r_{i_1 j_1}(s) \cdot (e_{i_1}).$$

$$\rho^2_s(e_{j_2}) = \sum_{i_2} r_{i_2 j_2}(s) \cdot (e_{i_2}).$$

[1]Aplicación lineal en sí mismo.

La matriz de producto tensorial de ρ_s^1 y ρ_s^2 es

$$\rho(e_{j_1} \otimes e_{j_2}) = \sum_{i_1,i_2} r_{i_1 j_1}(s) \otimes r_{i_2 j_2}(s) \otimes e_{i_1} \otimes e_{i_2}$$

donde la matriz de ρ_s es $r_{i_1 j_1}(s) r_{i_2 j_2}(s)$.

El *dual* de una representación V es denotado por $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ y también es una representación. Si tenemos dos representaciones de G con respecto al emparejamiento $\langle , \rangle$ entre V^* y V, si $\rho : G \to GL(V)$ es una representación y $\rho^* : G \to GL(V^*)$ es su dual; así que obtenemos $\langle \rho^*(g)(v^*), \rho(g)(v) \rangle = \langle v^*, v \rangle$ para todo $g \in G$, $v \in V$ y $v^* \in V^*$. Una definición más explícita del dual de una representación es: $\rho^*(g) = {}^t\rho(g^{-1}) : V^* \to V^*$ $g \in G$.

Teorema 1.1. *Con la definición del dual $\rho^*(g)$ el emparejamiento es satisfecho.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
\langle \rho^*(g)(v^*), \rho(g)(v) \rangle &= \langle {}^t\rho(g^{-1})(v^*),\ \rho(g)(v) \rangle \\
&= \langle (v^*),\ \rho(g^{-1})\rho(g)(v) \rangle \\
&= \langle v^*,\ \rho(g^{-1}g)(v) \rangle \\
&= \langle v^*,\ \rho(Id)(v) \rangle \\
&= \langle v^*,\ v \rangle.
\end{aligned}$$

□

Sean V y W dos representaciones, entonces $\mathrm{Hom}(V, W)$ es una representación, visto como $\mathrm{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$. Tenemos $v^* \otimes w \mapsto \varphi$ y φ está dada por $\varphi(v) = \langle v^*,\ v \rangle w$; como $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$; $v_1, \cdots, v_n$ es base de V; $w_1, \cdots, w_m$ base de W entonces $v_j^* \otimes w_i$ es base de $V^* \otimes W$. Tenemos

$$\varphi(v_j) = \sum a_{ij} w_i,$$

$$\varphi\left(\sum \alpha_j v_j\right) = \sum \alpha_j \sum a_{ij} w_i$$

donde $\alpha_j = \langle v_j^*,\ v\rangle$ entonces

$$\begin{aligned}\varphi\left(\sum \alpha_j v_j\right) &= \sum_{i,j} a_{ij}\langle v^*,\ v\rangle w_i \\ &= \sum a_{ij} v_j^* \otimes w_i(v).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathrm{Hom}(V,W) \cong V^* \otimes W$. Si $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ y le aplicamos g, $g\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ así que $g\varphi(v) = g\varphi(g^{-1}v)$. Tenemos $v^* \otimes w \in V^* \otimes W$; $g(v^* \otimes w) = gv^* \otimes gw$ entonces $v^* \otimes w(v) = \langle v^*,\ v\rangle w$ con $gv^* \in V^*$ y $gv^* =^t (g^{-1})v^*$; si $g : V \to V$ y ${}^t g : V^* \to V^*$ entonces $\langle {}^t g v^*,\ v\rangle = \langle v^*,\ gv\rangle$

$$\begin{aligned} g(v^* \otimes w)v &= gv^* \otimes gw(v) \\ &= \langle gv^*,\ v\rangle gw \\ &= \langle {}^t(g^{-1})v^*,\ v\rangle gw \\ &= \langle v^*,\ g^{-1}v\rangle gw.\end{aligned}$$

Por lo tanto $g\varphi(v) = \langle v^*,\ g^{-1}v\rangle gw$.

Definimos a el *homomorfismo G-lineal* como $\mathrm{Hom}_G(V,W) = \{\varphi \mid \varphi(gv) = g\varphi(v)\}$, y a el *homomorfismo G-módulo* como $\mathrm{Hom}(V,W)^G = \{\varphi \mid g\varphi = \varphi\}$.

Teorema 1.2. *Si* Hom_G *es el espacio vectorial de mapeos G-lineales entre dos representaciones* V *y* W *de* G *entonces* $\mathrm{Hom}_G(V,W) = \mathrm{Hom}(V,W)^G$.

Demostración. Un elemento de $\mathrm{Hom}(V,W)$ es un mapeo lineal φ de V a W. Entonces $(g\varphi)v = g\varphi(g^{-1}v)$ para todo $v \in V$. Tomamos $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)^G$ entonces:

$$\begin{aligned}(g\varphi)(v) &= g\varphi(g^{-1}v) \\ \varphi(v) &= g\varphi(g^{-1}v) \\ g^{-1}\varphi(v) &= g^{-1}g\varphi(g^{-1}v) \\ g^{-1}\varphi(v) &= \varphi(g^{-1}v)\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathrm{Hom}^G \subset \mathrm{Hom}_G$.

Ahora sea $\varphi \in \mathrm{Hom}_G$ entonces

$$\begin{aligned} g(\varphi(v)) &= g\varphi(g^{-1}v) \\ &= gg^{-1}(\varphi(v)) \\ &= \varphi(v). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathrm{Hom}_G \subset \mathrm{Hom}^G$. En conclusión $\mathrm{Hom}_G = \mathrm{Hom}^G$.

$\square$

Supongamos G actúa en un conjunto finito X; es decir, para cada $s \in G$, existe una permutación $x \mapsto sx$, que satisface la identidad

$$1x = x, s(tx) = (st)x \text{ si } s, t \in G, x \in X.$$

Sea V un espacio vectorial que tiene una base $(e_x)_{x \in X}$. Para cada $s \in G$, sea $\rho(s)$ el mapeo lineal de V a V el cual envia e_x a e_{sx}; la representación de G que obtenemos es llamada la *representación de permutación* asociada con X.

La *representación regular*, denotada por R; sea V espacio de funciones en G, $g \in G$ actua en una función f como $\rho(g)f(x) = f(g^{-1}x)$; notamos que $g\chi_h = \chi$, $g\chi_h(x) = \chi_h(g^{-1}x) = \chi_{gh}(x)$.

2. Reducibilidad completa

Sea V un espacio vectorial, y sean W y W' dos subespacios de V. El espacio V es llamado la suma directa de W y W' si cada $x \in V$ puede ser escrito de manera única en la forma $x = w + w'$, con $w \in W$ y $w' \in W'$; esto nos dice que $W \cap W' = \{0\}$ y $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W')$.

Entonces podemos escribir $V = W \oplus W'$, y decimos que W' es complementario de W en V.

Proposición 1.3. *Si W es una subrepresentación de una representación V de un grupo finito G, entonces tiene un subespacio complementario invariante W' de V.*

Demostración. Sea U un subespacio complementario a W, y $\pi_0 : V \to W$ una proyección[2] dada por la descomposición de suma directa $V = W \oplus U$. La suma del mapeo π_0 sobre G,

$$\pi(v) = \sum_{g \in G} g(\pi_0(g^{-1}(v))),$$

es G-lineal de V sobre W. Si calculamos $s \cdot \pi \cdot s^{-1}$, con $s \in G$, encontramos que

$$s \cdot \pi \cdot s^{-1} = \sum_{g \in G} s \ g \ \pi_0 \ g^{-1} \ s^{-1} = \pi.$$

Sea W' el kernel de π, entonces si $x \in W'$ y $s \in G$ tenemos $\pi x = 0$, y $\pi \cdot sx = s \cdot \pi x = 0$, esto es; $sx \in W'$. Por lo tanto W' es subespacio complementario invariante. □

Decimos que V es la suma directa de W y W', y escribimos $V = W \oplus W'$. Un elemento de V es identificado con un par (w, w') con $w \in W$ y $w' \in W'$. Si W y W' están dadas en forma de matriz por R_s y R_s', $W \oplus W'$ está dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s' \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.4. *Toda representación es una suma directa de representaciones irreducibles.*

Esta propiedad es llamada reducibilidad completa.

Demostración. Sea V una representación de G. Procedemos por inducción en $\dim(V)$. Si $\dim(V) = 0$, el teorema es válido ya que 0 es la suma directa de la familia vacía de representaciones irreducibles. Suponemos entonces que $\dim(V) \geq 1$.

[2] Envia cada $x \in V$ a su componente $w \in W$, la imagen de π_0 es W y $\pi_0(x) = x$, π_0 es un mapeo lineal de V en sí mismo que satisface dos propiedades: V es la suma directa de W y el kernel U de π_0.

Por la proposición 1.3, si V no es irreducible puede descomponerse como una suma directa $V' \oplus V''$ con $\dim(V') < \dim(V)$ y $\dim(V'') < \dim(V)$. Por la hipótesis de inducción, V' y V'' son sumas directas de representaciones irreducibles. Por lo tanto V es la suma directa de representaciones irreducibles. □

Lema 1.5. *(Schur). Si V y W son representaciones irreducibles de G y $\varphi : V \longrightarrow W$ es un homomorfismo de G-módulos, entonces*

1. *φ es un isomorfismo o $\varphi = 0$.*
2. *Si $V = W$, entonces $\varphi = \lambda \operatorname{Id}$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Demostración.

- Para ver que φ es un isomorfismo tenemos que verificar que es inyectivo y sobreyectivo, así que nos fijamos en $\ker \varphi = \{v | \varphi(v) = 0\}$. Como φ es un homomorfismo G-módulo, tenemos $\varphi(gv) = g\varphi(v)$. Ahora, como $v \in \ker \varphi$, $\varphi(gv) = g(0) = 0$, como V es irreducible así que $gv \in \ker \varphi$. Entonces $\ker \varphi$ es invariante entonces $\ker \varphi = V$ o $\ker \varphi = \{0\}$. Si $\ker \varphi = \{0\}$, es inyectiva.
  Ahora, consideramos $\operatorname{Im} \varphi = \{\varphi(v) | v \in V\} \subset W$. Como φ es homomorfismo G-módulo entonces tenemos que $g\varphi(v) = \varphi(gv)$. Sea $v \in \operatorname{Im} \varphi$; entonces $g(\varphi(v)) = \varphi(gv) \in \operatorname{Im} \varphi$, lo que nos lleva a $g(\varphi(v)) \in \operatorname{Im} \varphi$. Así que $\operatorname{Im} \varphi$ es invariante. Como W es irreducible $\operatorname{Im} \varphi = \{0\}$ o W, si $\operatorname{Im} \varphi = \{0\}$, entonces $\varphi = 0$; si $\operatorname{Im} \varphi = W$ entonces φ es sobreyectiva y por lo tanto φ es un isomorfismo.
- Queremos verificar que $\varphi(v) = \lambda v$. φ tiene al menos un eigenvector en V $v_0 \neq 0$. Si $\varphi(v_0) = \lambda_0 v_0$, entonces $(\varphi - \lambda_0 \operatorname{Id}) v_0 = 0$. Por la primera parte $\varphi - \lambda_0 \operatorname{Id} : V \to V$ es isomorfismo o 0 entonces $\varphi - \lambda_0 \operatorname{Id} = 0$ y $\varphi = \lambda_0 \operatorname{Id}$.

□

Proposición 1.6. *Para cualquier representación V de un grupo finito G existe una descomposición*

$$V \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k},$$

donde las V_i son las distintas representaciones irreducibles. También V se puede escribir como

$$V = a_1V_1 \oplus \cdots \oplus a_kV_k = a_1V_1 + \cdots + a_kV_k.$$

Esta descomposición de V como de una suma directa de los k factores es única, así como V_i y sus multiplicidades.

Demostración. Si W es otra representación de G con la descomposición $W = \bigoplus W_j^{\oplus b_j}$ y $\varphi : V \to W$ es un mapeo de representaciones, entonces φ, por el Lema de schur debe mandar el factor $V_i^{\oplus a_i}$ al factor, $W_j^{\oplus b_j}$ para el cual $W_j \cong V_i$ cuando aplicamos al mapeo identidad de V a V.

□

3. Ejemplos

3.1. Grupos Abelianos. Sea G un grupo abeliano y finito. Si tenemos una representación V, cada $g \in G$ da un mapeo $\rho(g) : V \to V$ y será G-lineal para cada ρ si y solo si g está en el centro de G, denotado como $Z(G) = \{g \in G |\ gh = hg\ \forall\ h \in G\}$. Para mostrarlo, sea $g \in Z(G)$, $Z(G) = G$. Entonces si G es abeliano,

$$\begin{aligned}
\rho(g)(v) &= gv \text{ nos tomamos } h \in G \\
\rho(g)(hv) &= ghv \text{ como } g \in Z(G) \text{ entonces} \\
\rho(g)(hv) &= hgv \text{ por definición tenemos} \\
\rho(g)(hv) &= h\rho(g)(v)
\end{aligned}$$

Así que $\rho(g)$ es G-lineal.

Además, si V es una representación irreducible, por el lema de Schur cada elemento $g \in G$ actúa en V por un múltiplo escalar de la identidad, $\rho(g) = \lambda_g\,\mathrm{Id}$. Si $g \in G$, entonces $gV = \lambda_g V$. Como $\lambda_g \in \mathbb{C}$, dim $V = 1$, es decir el grado de la representación es 1.

Si G es un grupo finito de orden N, entonces, para $g \in G, g^N = 1$, donde 1 es la identidad del grupo. Si tenemos la representación irreducible $\rho(g)$ que envia a $T_g = \lambda_g \operatorname{Id}$, donde $\lambda_g \operatorname{Id}$ es un múltiplo escalar de la identidad, entonces

$$T_g^N = \lambda_g^N = 1,$$

$$T_g^N = e^{\frac{2\pi i k}{N}}$$

donde $k \in \mathbb{Z}$ depende de g. Esta igualdad resulta porque λ es raíz N-ésima de la identidad. Ahora, con $h \in G$, si G es abeliano $T_{gh} = T_{hg}$, y aplicando lo anterior resulta

$$\lambda_{gh}^N = \lambda_{hg}^N = e^{\frac{2\pi i(l+k)}{N}},$$

donde l depende de h. Así que $T_g : G \to \mathbb{Z}_N$ es un homomorfismo de G a $\mathbb{Z}_N$, el grupo de las N-ésimas raíces de la unidad, $\mathbb{Z}_N = \{e_0, \cdots e_{N-1}\}$ es e_i

3.2. El grupo simétrico $\mathbb{S}_3$. Es el grupo de permutaciones (de tres objetos bajo la composición de funciones). Las permutaciones se representan con la notación de ciclos. Así $\mathbb{S}_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$.

Este grupo tiene tres transposiciones y dos 3-ciclos. El orden de este grupo es 6 ($|\mathbb{S}_3| = 6$) y sus clases de conjugación (a es conjugado a b si existe $x \in G$ tal que $b = x^{-1}ax$) son $[(1)], [(12)]$y $[(123)]$, donde

$$[(1)] = \{(1)\}.$$
$$[(12)] = \{(12), (13), (23)\}.$$
$$[(123)] = \{(123), (132)\}.$$

Las representaciones de $\mathbb{S}_3$ son tres: la trivial, la alternante y la estándar.

La trivial está dada por $gv = v$ para todo $g \in \mathbb{S}_3$ y tiene dimensión 1.

La alternante es descrita como $gv = \mathrm{sgn}(g)v$ para todo $g \in \mathbb{S}_3$ y tiene dimensión 1. La representación alternante para cada elemento de $\mathbb{S}_3$ es: $(1)v = v$, $(12)v = -v$, $(13)v = -v$, $(23)v = -v$, $(123)v = v$, $(132)v = v$, con $v \in \mathbb{C}$.

Tenemos la representación natural de permutaciones en el cual $\mathbb{S}_3$ actúa sobre $\mathbb{C}^3$ permutando coordenadas. Si $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base estándar, entonces $g \cdot e_i = e_{g(i)}$. Equivalentemente $g(z_1, z_2, z_3) = (z_{g^{-1}(1)}, z_{g^{-1}(2)}, z_{g^{-1}(3)})$.

La representación natural de permutaciones es reducible con espacio invariante

$$V = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 + z_2 + z_3 = 0\}.$$

V es irreducible y es llamada la representación estándar.

Proposición 1.7. *Sean $\sigma = (12)$ y $\tau = (123)$ elementos de $\mathbb{S}_3$. Entonces la representación estándar tiene base $\alpha = (\omega, 1, \omega^2)$ y $\beta = (1, \omega, \omega^2)$, donde $\omega = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ es la raíz cúbica de 1 con $\sigma\alpha = \beta$, $\tau\alpha = \omega\alpha$, $\tau\beta = \omega^2\beta$ y $\sigma\beta = \alpha$.*

Demostración. Sea $V = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$. Para ver que α, β son una base para V, verificamos dos propiedades:

1. $\{z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$ es generado por α y β.
2. α y β son linealmente independientes.

Que sea generado quiere decir que se cumple

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}.$$

Entonces encontraremos a λ y μ para $z_1,\ z_2,\ z_3$.

Tenemos las ecuaciones $\lambda\omega + \mu = z_1$, $\lambda + \mu\omega = z_2$ y $\lambda\omega^2 + \mu\omega^2 = z_3$, con solución $\lambda = \dfrac{z_2 - z_1\omega}{1 - \omega^2}$ y $\mu = \dfrac{z_1 - z_2\omega}{1 - \omega^2}$.

Por lo tanto $\{z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$ es generado por α y β.

Para ver que α y β son linealmente independientes, suponemos que

$$\lambda \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y mostraremos que $\lambda = \mu = 0$. Entonces tenemos tres ecuaciones: $\lambda\omega + \mu = 0$, $\lambda + \mu\omega = 0$ y $\lambda\omega^2 + \mu\omega^2 = 0$. De la primera ecuación tenemos $\mu = -\lambda\omega$. Metemos esto en la segunda y tenemos $\lambda - \lambda\omega^2 = 0$, entonces $\lambda(1-\omega^2) = 0$ lo que nos da $\lambda = 0$. Si sustituimos este valor en la primera ecuación nos da $\mu = 0$. Por lo tanto α y β son linealmente independientes, y forman una base para V.

Ahora verificamos que se cumplan $\sigma\alpha = \beta$, $\tau\alpha = \omega\alpha$,$\sigma\beta = \alpha$ $\tau\beta = \omega^2\beta$.

$$\sigma\alpha = \sigma \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \beta.$$

$$\tau\alpha = \tau \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^2 \\ \omega \\ 1 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \omega\alpha.$$

$$\sigma\beta = \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \alpha.$$

$$\tau\beta = \tau \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^2 \\ 1 \\ \omega \end{pmatrix} = \omega^2\beta.$$

□

Vemos como actúan los otros elementos de $\mathbb{S}_3$ en α y β.

$(1)\alpha = \alpha$ y $(1)\beta = \beta$.

$$(13)\alpha = (13)\begin{pmatrix}\omega\\1\\\omega^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega^2\\1\\\omega\end{pmatrix} = \omega^2\beta.$$

$$(23)\alpha = (23)\begin{pmatrix}\omega\\1\\\omega^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega\\\omega^2\\1\end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix}1\\\omega\\\omega^2\end{pmatrix} = \omega\beta.$$

$$(132)\alpha = (132)\begin{pmatrix}\omega\\1\\\omega^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\omega^2\\\omega\end{pmatrix} = \omega^2\begin{pmatrix}\omega\\1\\\omega^2\end{pmatrix} = \omega^2\alpha.$$

$$(13)\beta = (13)\begin{pmatrix}1\\\omega\\\omega^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega^2\\\omega\\1\end{pmatrix} = \omega\alpha.$$

$$(23)\beta = (23)\begin{pmatrix}1\\\omega\\\omega^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\omega^2\\\omega\end{pmatrix} = \omega^2\alpha.$$

$$(132)\beta = (132)\begin{pmatrix}1\\\omega\\\omega^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega\\\omega^2\\1\end{pmatrix} = \omega\beta.$$

En esta base, la representación estándar de cada elemento de $\mathbb{S}_3$ tiene matrices:

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix},$$

$$(13) = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(23) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ \omega & 0 \end{pmatrix},$$

$$(132) = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}.$$

Capítulo 2

Teoría de caracteres

En este capítulo, definiremos el caracter de una representación, además de dar sus propiedades y enunciar un ejemplo en grupos abelianos; en la sección dos se elaboraran tablas de caracteres, en particular, los caracteres del grupo de permutaciones con dos y tres elementos. Mientras en la sección tres se darán técnicas para descomponer una representación en irreducibles; además de dar una fórmula para la proyección de una representación general sobre la suma directa y describir la representación regular.

1. El caracter de una representación

Sea un espacio vectorial con una base $\{e_i\}$ de n elementos y sea A un mapeo lineal en el espacio vectorial, con matriz $(a_{i,j})$ respecto a la base $\{e_i\}$ entonces la traza de A está definida como

$$tr(A) = \sum_i a_{i,i}.$$

Si V es una representación de G, un *caracter* χ_V es una función de valores complejos sobre el grupo definido por

$$\chi_V(g) = tr(g_V),$$

la traza de g sobre V. Cabe mencionar que la traza es la suma de los eigenvalores de A (con sus respectivas multiplicidades) y no dependen de la elección de la base $\{e_i\}$. En particular, tenemos $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g)$, y así que χ_V es llamada una *función de clase.* También observamos que $\chi_V(1) = \dim V$.

Proposición 2.1. *Sean $\rho^1 : G \to GL(V_1)$ y $\rho^2 : G \to GL(V_2)$ dos representacioes de G, y sean χ_1 y χ_2 sus respectivos caracteres. Entonces:*

(i) *El caracter χ de la suma directa de representaciones $\rho_1 \oplus \rho_2$ es igual a $\chi_1 + \chi_2$.*

(ii) *El caracter χ del producto tensorial de representaciones $\rho_1 \otimes \rho_2$ es igual a $\chi_1 \cdot \chi_2$.*

Demostración. Sean ρ^1 y ρ^2 dadas en forma de matriz por R^1 y R^2. La representación $\rho_1 \oplus \rho_2$ está dada por la matriz

$$R = \begin{pmatrix} R^1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

y entonces $tr(R) = tr(R^1) + tr(R^2)$, que implica $\chi = \chi_1 + \chi_2$.

Ahora, para el punto (ii), recordemos la notación del producto tensorial, $\rho^1 = \sum r_{i_1 j_1}$ y $\rho^2 = \sum r_{i_2 j_2}$, tenemos

$$\chi_1 = \sum_{i_1} r_{i_1 i_1},$$

$$\chi_2 = \sum_{i_2} r_{i_2 i_2},$$

entonces

$$\chi = \sum_{i_1 i_2} r_{i_1 i_1} r_{i_2 i_2} = \chi_1 \cdot \chi_2.$$

□

1.1. Ejemplo: Grupos abelianos. Si G es abeliano, un caracter en G es una función de valores complejos

$$e : G \to S^1$$

la cual satisface $e(a \cdot b) = e(a)e(b)$ para todo $a, b \in G$.

Proposición 2.2. $\{e_0, \cdots, e_{N-1}\}$ *es una base ortogonal del espacio* $L_N : \{F := \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}\}$ *con el producto interno*

$$(F, H) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k)\overline{H(k)}.$$

donde e es un caracter.

Demostración. Primero tenemos que ver que (F, H) es un producto interno.

Observación 2.3. i) E, F, H *son elementos de* L_N *entonces* $(F, H+E) = (F, H) + (F, E)$.

ii) *Si* $\alpha \in \mathbb{C}$, *entonces* $(\alpha F, H) = \alpha(F, H)$ *y* $(F, \alpha H) = \overline{\alpha}(F, H)$.

iii) $(F, H) = (H, F)$

Demostración. Para el primer punto tenemos

$$\begin{aligned}(F, H+E) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k)\overline{(H(k)+E(k))} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k)\overline{H(k)} + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k)\overline{E(k)} \\ &= (F, H) + (F, E).\end{aligned}$$

Mientras para el segundo

$$\begin{aligned}(\alpha F, H) &= \alpha \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k)\overline{G(k)} \\ &= \alpha(F, H). \\ (F, \alpha H) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k)\overline{\alpha H(k)} \\ &= \overline{\alpha} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k)\overline{H(k)} \\ &= \overline{\alpha}(F, H).\end{aligned}$$

Por último el punto 3: $(F, H) = (\overline{H, F})$

$$\begin{aligned} (F, H) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k)\overline{H(k)} \\ &= \frac{1}{N} (F(0)\overline{H(0)} + \cdots + F(N-1)\overline{H(N-1)}. \\ \overline{(H, F)} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{H(k)\overline{F(k)}} \\ &= \frac{1}{N} (\overline{H(0)\overline{F(0)}} + \cdots + \overline{H(N-1)\overline{F(N-1)}}) \\ &= \frac{1}{N} (\overline{H(0)}F(0) + \cdots + \overline{H(N-1)}F(N-1)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $(F, H) = \overline{(H, F)}$. Por lo tanto (F, H) es un producto interno. $\square$

La norma está dada por $||F||^2 = (F, F) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |F(k)|^2$. Sabemos que $e_n(k) = e^{\frac{2\pi i n k}{N}} = \zeta^{nk}$, queremos ver que las e_n forman una base ortogonal. Tenemos que mostrar que sus elementos son mutuamente perpendiculares, esto es $(e_m, e_j) = 0$ con $m \neq j$. Como $e_m(k) = e^{\frac{2\pi i m k}{N}}$ y $e_j(k) = e^{\frac{2\pi i j k}{N}}$ entonces

$$\begin{aligned} (e_m, e_j) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta^{mk} \zeta^{-jk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta^{(m-j)k}. \end{aligned}$$

Como $m \neq j$, $\zeta^{m-j} = q \neq 1$ y entonces $\sum_{k=0}^{N-1} q^k = 0$ Por lo tanto $(e_m, e_j) = 0$. Ahora, si $m = j$,

$$\begin{aligned} (e_m, e_m) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta^{mk} \zeta^{-mk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta^{(m-m)k} = 1. \end{aligned}$$

$\square$

Si F es una función en $\mathbb{Z}_N$, el n-ésimo coeficiente de Fourier de F es

$$a_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F(k)e^{-\frac{2\pi ikn}{N}}$$

para $n = 0, \cdots, N-1$. Entonces podemos enunciar una versión del teorema de Inversión de Fourier y la identidad de Parseval-Plancherel para $\mathbb{Z}_N$.

Teorema 2.4. *Sea F una función en $\mathbb{Z}_N$ y a_n el $n-$ésimo coeficiente de Fourier. Entonces*

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{\frac{2\pi ink}{N}}.$$

Más aún $\sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |F(k)|^2$.

Demostración. Por la proposición 2.2 las funciones e_n son ortonormales L_N. Sabemos que $F = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e_n$. Como las e_n son ortonormales, entonces $a_n = (F, e_n)$ porque

$$\begin{aligned}(F, e_n) &= (\sum_{m=0}^{N-1} a_m e_m, e_n) \\ &= \sum a_m(e_m, e_n) = a_n\end{aligned}$$

Por el teorema de Pitágoras,

$$(F, F) = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2,$$

y entonces

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |F(k)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2.$$

□

2. Tabla de caracteres

El caracter de una representación de un grupo G es una función en el conjunto de clases de conjugación de G; podemos expresar esta información en una tabla de caracteres, donde las clases de conjugación son listadas en la parte superior, dadas por un representante g, con el número de elementos en cada clase de conjugación; la representación irreducible aparecerá en la parte izquierda; y en el interior el valor del caracter en la clase de conjugación $[g]$.

2.1. Grupo $\mathbb{S}_2$. El grupo de permutaciones con dos elementos $\mathbb{S}_2 = \{(1), (12)\}$ tiene la identidad y un 2-ciclo y sus clases de conjugación son: $[(1)]$ y $[(12)]$.

	1	1
$\mathbb{S}_2$	$[(1)]$	$[(12)]$
trivial	1	1
alternante	1	-1

El caracter de la representación trivial es $(1, 1)$, mientras que el de la representación alternante es $(1, -1)$.

2.2. La tabla de caracteres de $\mathbb{S}_3$. En la parte superior de la tabla aparece el número de elemenros con los que cuenta cada clase de conjugación del grupo $\mathbb{S}_3$. Las matrices de la representación éstandar las tenemos por el capitulo anterior así que solo obtendremos la traza para tener el carcter de cada clase de conjugación.

$$tr(Id) = 2,\ tr(12) = 0,\ tr(123) = \omega + \omega^2 = -1.$$

	1	3	2
$\mathbb{S}_3$	$[(1)]$	$[(12)]$	$[(123)]$
trivial	1	1	1
alternante	1	-1	1
estandar	2	0	-1

$\mathbb{S}_3$ tiene tres clases de conjugación : $[1], [(12)]$ y $[(123)]$. El caracter de la representación trivial es $(1, 1, 1)$, el de la representación alternante es $(1, -1, 1)$ y el de la representación estandar es $(2, 0, -1)$.

Proposición 2.5. *Sea X un conjunto finito en el cual actúa G, y sea $\rho(s)$ la correspondiente representación de permutaciones. Para $s \in G$, $\chi_\rho(s)$ es el número de elementos de X fijados por s.*

Demostración. Recordemos la representación de permutaciones: si G actúa en un conjunto finito X, para cada $s \in G$ existe una permutación $x \mapsto sx$ que satisface

$$1x = x, \ \ s(tx) = (st)x \text{ si } s, t \in G, \ \ x \in X.$$

Sea V un espacio vectorial que tiene a $(e_x)_{x \in X}$ como base. Para $s \in G$ sea $\rho(s)$ el mapeo lineal de V a V que envía e_x a e_{sx}. Existe una matriz A_s en V tal que $\rho(s) = \rho(A_s)$. Es decir A_s es la matriz asociada con el mapeo lineal $\rho(s)$. Si tenemos $A_s = (a_{ij})$

$$\begin{aligned} A_s \cdot e &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}e_1 + & \cdots & +a_{1n}e_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}e_1 + & \cdots & +a_{nn}e_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si $u = [a_x e_x]$ y v es el n-vector de coeficientes a_x, $\rho_s(u) = A_s v$

$$\begin{aligned} tr(\rho(s)(e)) &= tr(A_s e) \\ &= tr \begin{pmatrix} a_{11}e_1 + & \cdots & +a_{1n}e_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}e_1 + & \cdots & +a_{nn}e_n \end{pmatrix} \\ &= a_{11} + \cdots + a_{nn}. \end{aligned}$$

Si $A_s = (a_{xy})$,

$$a_{xy} = \begin{cases} 1 & \rho(s)(x) = x. \\ 0 & \rho(s)(x) \neq x. \end{cases}$$

Entonces

$$\rho(s)(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \rho(s)(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $\chi_\rho(s) = tr(e_{sx})$ esto es el número de elementos de X fijos por s. $\square$

3. La primera fórmula de proyección y sus consecuencias.

Una representación $\rho(g) : V \to V$ no es en general un G-módulo homomorfismo. Sin embargo, si nos tomamos el promedio

$$\varphi = \frac{1}{\mid G \mid} \sum_{g \in G} \rho_g,$$

entonces el endomorfismo φ es G-lineal; porque si $\varphi(hv) = \frac{1}{|G|} \sum g(hv)$, escribimos a $g = hgh^{-1}$ y entonces

$$\varphi(hv) = \frac{1}{\mid G \mid} \sum_{g \in G} (hgh^{-1})(hv) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} hgv = h\varphi(v).$$

Para cualquier representación V de un grupo G, definimos el conjunto

$$V^G = \{v \in V : gv = v \ \forall \ g \in G\},$$

donde V^G son los elementos fijados por G.

Proposición 2.6. *El mapeo φ es una proyección de V sobre V^G.*

Demostración. Supongamos que $v = \varphi(w) = \frac{1}{|G|} \sum gw$. Entonces para cualquier $h \in G$,

$$hv = \frac{1}{|G|} \sum hgw = \frac{1}{|G|} \sum gw = v.$$

Entonces la imagen de φ está contenida en V^G. Si $v \in V^G$ entonces

$$\varphi(v) = \frac{1}{|G|} \sum gv = \frac{1}{|G|} \sum v = v,$$

por lo que $V^G \subset \mathrm{Im}(\varphi)$ y $\varphi \circ \varphi = \varphi$. Por lo tanto φ es una proyección. $\square$

Si queremos conocer el número m de copias de la representación trivial que aparece en la descomposición de V, podemos hacerlo numéricamente. Tenemos

$$m = \dim V^G = tr(\varphi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} tr(g) = \frac{1}{|G|}\chi_v(g). \tag{2.1}$$

En particular, para una representación irreducible V distinta de la trivial la suma sobre todo $g \in G$ de los valores del caracter χ_V es cero.

La traza de φ para $\mathbb{S}_3$.

En la sección anterior conocimos los caracteres de las tres representaciones irreducibles de este grupo. La traza para la representacion trivial es

$$tr(\varphi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g) = \frac{1}{6}(1+1+1+1+1+1) = 1.$$

Para la representación estándar tenemos

$$tr(\varphi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g) = \frac{1}{6}(2+0+0+0-1-1) = 0.$$

Para la representación alternante calculamos

$$tr(\varphi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g) = \frac{1}{6}(1-1-1-1+1+1) = 0.$$

Si V y W son representaciones de G, por el capítulo 1 $\mathrm{Hom}^G = \mathrm{Hom}_G$ tenemos

$$\mathrm{Hom}(V,W)^G = \{\text{G-módulo homomorfismo de V a W}\}. \tag{2.2}$$

Si V es irreducible, entonces por el lema de Schur $\dim(\mathrm{Hom}(V,W)^G)$ es la multiplicidad de V en W. Similarmente si W es irreducible, $\dim(\mathrm{Hom}(V,W)^G)$ es la multiplicidad de W en V. En el caso en que ambas son irreducibles tenemos

$$\dim(\mathrm{Hom}(V,W)^G) = \begin{cases} 1 & V \cong W \\ 0 & V \ncong W. \end{cases} \tag{2.3}$$

Pero el caracter $\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)^G}$ de la representación $\mathrm{Hom}(V,W) = V^* \otimes W$ está dada por

$$\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)^G}(g) = \overline{\chi}_V(g)\chi_W(g).$$

Entonces,

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi}_V(g)\chi_W(g) = \dim(\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)^G}(g)),$$

por la fórmula 2.3, y si V y W son irreducibles obtenemos

$$(\chi_V,\chi_W) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi}_V(g)\chi_W(g) = \begin{cases} 1 & V\cong W \\ 0 & V\ncong W. \end{cases} \tag{2.4}$$

Para llegar a este resultado, definimos a

$$\mathbb{C}_{clase}(G) = \{\text{funciones de clase en G}\}.$$

Definimos además el producto interno Hermitiano en $\mathbb{C}_{clase}(G)$ por

$$(\alpha,\beta) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\alpha}(g)\beta(g).$$

Teorema 2.7. *Los caracteres de las representaciones irreducibles de G son ortonormales en términos de este producto interno.*

Demostración. Sean V y W dos representaciones irreducibles de G con sus respectivos caracteres $\chi_V(g)$ y $\chi_W(g)$. Entonces

$$(\chi_V(g),\chi_W(g)) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi}_V(g)\chi_W(g) = 0$$

por la ecuación 2.4.

Ahora, si $V\cong W$,

$$(\chi_V(g),\chi_W(g)) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi}_V(g)\chi_W(g) = 1$$

por la ecuación 2.4. $\square$

El número de representaciones irreducibles de G es menos o igual que el número de clases de conjugación.

Corolario 2.8. *La multiplicidad a_i de V_i en V es el producto interno de χ_V con χ_{V_i}, es decir, $a_i = (\chi_V, \chi_{V_i})$; además $(\chi_V, \chi_V) = \sum a_i^2$*

Demostración. Sabemos que

$$(\chi_V, \chi_{V_i}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V} \chi_{V_i}.$$

Entonces

$$(\chi_V, \chi_{V_i}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum a_i \chi_{V_i}^{-1} \chi_{V_i}.$$

Por lo tanto $(\chi_V, \chi_{V_i}) = a_i$.

□

Corolario 2.9. *Cualquier representación es determinada por sus caracteres.*

Demostración. Sea V una representación se descompone en la suma directa de representaciones irreducibles entonces

$$V \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}.$$

Por la proposición 1.6 tenemos

$$V = a_1 V_1 \oplus \cdots \oplus a_k V_k = a_1 V_1 + \cdots + a_k V_k,$$

donde las a_i son las multiplicidades de las V_i. Los caracteres de las $V_1, \cdots V_k$ son $\chi_{V_1}, \cdots, \chi_{V_k}$. Por la proposición 2.1 el caracter de V está dado por $a_1 \chi_{V_1} + \cdots + a_k \chi_{V_k}$; entonces $\chi_V = \sum a_i \chi_{V_i}$. Por lo tanto V está determinada por sus caracteres.

□

En el siguiente corolario obtenemos un criterio de irreducibilidad.

Corolario 2.10. *Una representación V es irreducible si y solo si $(\chi_V, \chi_V) = 1$.*

Demostración. Sabemos que si V es irreducible entonces, por el teorema 2.7 sus caracteres son ortonormales, es decir $(\chi_V, \chi_V) = 1$, así que se termina la implicación. Ahora, si $(\chi_V, \chi_V) = 1$ con V una representación que se puede descomponer en la suma directa de representaciones irreducibles, entonces $V \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}$, así que el caracter de V es $a_1\chi_{V_1} + \cdots + a_k\chi_{V_k}$ tenemos $a_i = (\chi_V, \chi_{V_i})$ y la relación de ortogonalidad implica que $(\chi_V, \chi_V) = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 = 1$. Por lo tanto algún $a_i = 1$ y el resto son cero, así que V es irreducible.

□

4. La representación regular

Sea R la representación regular de G, la cual tiene una base $(e_t)_{t\in G}$ tal que $\rho(g)e_t = e_{gt}$. Si $g \neq 1$, tenemos $gt \neq t$ para todo t, por lo que ninguno de los términos de la diagonal de la matriz de $\rho(g)$ quedan fijos. Por la proposición 2.5

$$tr(\rho(g)) = 0 = \chi_R.$$

Ahora, si $g = 1$, tenemos que $gt = t$ para todo t, por 2.5

$$tr(\rho(g)) = tr(1) = \dim(R) = n = |G|. \tag{2.5}$$

Así que el caracter de R es

$$\chi_R(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \neq \mathrm{Id}\,. \\ |G| & \text{si } g = \mathrm{Id}\,. \end{cases}$$

R es no irreducible si $G \neq \{1\}$, entonces $R = \bigoplus V_i^{\oplus a_i}$, con V_i irreducibles distintas. Entonces $a_i = (\chi_{V_i}, \chi_R)$ por el corolario 2.8 , ahora $a_i = \frac{1}{|G|}\overline{\chi_{V_i}}(g)\chi_R(g)$ sustituyendo el caracter de la representación regular nos resulta $a_i = \frac{1}{|G|}\chi_{V_i}(g)^{-1} \cdot 0 \quad a_i = 0 \;$ si $\; g \neq \mathrm{Id}\,$.

$$a_i = (\chi_{V_i}, \chi_R) = \frac{1}{|G|}\overline{\chi_{V_i}(\mathrm{Id})} \cdot |G| = \dim(V_i).$$

Corolario 2.11. *Cualquier representación irreducible V de un grupo G aparece en R un número de veces iguales a la dimensión de V.*

Demostración.

$$(\chi_V, \chi_R) = \frac{1}{|G|}\overline{\chi_V(\mathrm{Id}\,.)}|G| = \dim V.$$

Por lo tanto el número de las veces que aparece V en R es la dimensión de V. $\square$

En particular, esto prueba de nuevo que las representaciones irreducibles son finitas. Sabemos que $\chi_R = \sum a_i \chi_{V_i}$ y $\chi_R(g) = |G| = \dim(R(g))$; si $g = \mathrm{Id}\,.$

$$\begin{aligned}
\dim(R) &= |G| \\
&= \chi_R(g) \\
&= \sum a_i\ \chi_{V_i}(g) \\
&= \sum \dim(V_i)\ \chi_{V_i}(\mathrm{Id}\,.) \\
&= \sum \dim(V_i) \dim(V_i) \\
&= \sum \dim(V_i)^2.
\end{aligned}$$

$$|G| = \dim(R) = \sum (V_i)^2 \tag{2.6}$$

También podemos aplicar esto al valor del caracter de la representación regular en un elemento $g \in G$ distinto de la identidad,

$$0 = \chi_R(g) = \sum (\dim(V_i)) \cdot \chi_{V_i}(g).$$

4.1. Representación regular de $\mathbb{S}_3$. La representación regular en cualquier grupo, está dada por $(gF)h = F(g^{-1}h)$ donde F es una función. Si $\rho(x)$ es la función caracteristica y $g, h \in G$, tenemos

$$\begin{aligned} g\rho(x)(h) &= \rho(x)(g^{-1}h) \\ &= \begin{cases} 1 \text{ si } g^{-1}h = x \\ \quad 0 \text{ si no.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 h = gx \\ 0 h \neq gx. \end{cases} \\ &= \rho(gx)(h). \end{aligned}$$

Entonces obtenemos la definición de $R_{\mathbb{S}_3}$ en la base estándar $\{\rho(x) : x \in G\}$ $g\rho(x) = \rho(gx)$. Expresamos explícitamente $g\rho(x) = \rho(gx)$

$g \setminus \rho(x)$	$\rho(1)$	$\rho(12)$	$\rho(13)$	$\rho(23)$	$\rho(123)$	$\rho(132)$
(1)	$\rho(1)$	$\rho(12)$	$\rho(13)$	$\rho(23)$	$\rho(123)$	$\rho(132)$
(12)	$\rho(12)$	$\rho(1)$	$\rho(132)$	$\rho(123)$	$\rho(23)$	$\rho(13)$
(13)	$\rho(13)$	$\rho(123)$	$\rho(1)$	$\rho(132)$	$\rho(12)$	$\rho(23)$
(23)	$\rho(23)$	$\rho(132)$	$\rho(123$	$\rho(1)$	$\rho(13)$	$\rho(12)$
(123)	$\rho(123)$	$\rho(13)$	$\rho(23)$	$\rho(12)$	$\rho(132)$	$\rho(1)$
(132)	$\rho(132)$	$\rho(23)$	$\rho(12)$	$\rho(13)$	$\rho(1)$	$\rho(123)$

La representación regular de $\mathbb{S}_3$ es la suma directa de sus representaciones irreducible $R_{\mathbb{S}_3} = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4$, donde V_1 es la representación trivial y tiene dimensión 1, V_2 es la representación alternante, también de dimensión 1; V_3 y V_4 son la representación estándar de dimensión 2. Como la dimensión de $R_{\mathbb{S}_3}$ es 6, consideramos la base estándar de $R_{\mathbb{S}_3}$, escribiendo las funciones $\rho(x)$ como vectores

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Observamos entonces que

$$V_1 = \text{gen}\{\rho(1) + \rho(12) + \rho(13) + \rho(23) + \rho(123) + \rho(132)\},$$

$$V_2 = \text{gen}\{\rho(1) - \rho(12) - \rho(13) - \rho(23) + \rho(123) + \rho(132)\}.$$

Ahora, para encontrar V_3 y V_4 resolveremos ecuaciones que cumplan con $(12)\alpha = \beta,\ (123)\alpha = \omega\alpha,\ (123)\beta = \omega^2\beta$ y $(12)\beta = \alpha$ en donde encontraremos α y β. Entonces: $\text{gen}\{\alpha, \beta\}$

$$(12)\alpha = \begin{pmatrix}x_2\\x_1\\x_6\\x_5\\x_4\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\\y_6\end{pmatrix},\ (12)\beta = \begin{pmatrix}y_2\\y_1\\y_6\\y_5\\y_4\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{pmatrix}$$

$$(123)\alpha = \begin{pmatrix}x_6\\x_4\\x_2\\x_3\\x_1\\x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega x_1\\\omega x_2\\\omega x_3\\\omega x_4\\\omega x_5\\\omega x_6\end{pmatrix},\ (123)\beta = \begin{pmatrix}y_6\\y_4\\y_2\\y_3\\y_1\\y_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega^2 y_1\\\omega^2 y_2\\\omega^2 y_3\\\omega^2 y_4\\\omega^2 y_5\\\omega^2 y_6\end{pmatrix}$$

resolviendo los sistemas obtenemos: $x_1 = y_2,\ x_2 = y_1,\ x_3 = \omega^2 x_2,\ x_4 = \omega x_2,\ x_5 = \omega^2 x_1$ y $x_6 = \omega x_1$; $y_1 = x_2,\ y_2 = x_1,\ y_3 = \omega x_1,\ y_4 = \omega^2 x_1,\ y_5 = \omega x_2$ y $y_6 = \omega^2 x_2$. Entonces

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \omega^2 \\ \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix},\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \omega \\ \omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Asi que ya tenemos V_3 y V_4;

$$\begin{aligned}
V_3 &= \text{gen}\{\alpha_1,\ \beta_1\} \\
&= \text{gen}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \\
&= \text{gen}\{\rho(1) + \omega^2\rho(123) + \omega\rho(132), \rho(12) + \omega\rho(13) + \omega^2\rho(23)\}. \\
V_4 &= \text{gen}\{\alpha_2, \beta_2\} \\
&= \text{gen}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \omega^2 \\ \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}\} \\
&= \text{gen}\{\rho(12) + \omega^2\rho(13) + \omega\rho(23), \rho(1) + \omega\rho(123) + \omega^2\rho(132)\}.
\end{aligned}$$

5. Más consecuencias de la fórmula de proyección

Proposición 2.12. *Sea $\alpha : G \to \mathbb{C}$ cualquier función en el grupo G. Para cualquier representación V, sea $\varphi_{\alpha,V} : V \to V$ dada por*

$$\varphi_{\alpha,V} = \sum \alpha(g) \cdot g,$$

donde el endomorfismo $\varphi_{\alpha,V}$ esta dado por la suma de funciones en el grupo. Entonces $\varphi_{\alpha,V}$ es un homomorfismo G-módulo para todo V si α es una función de clase.

Demostración. $\varphi_{\alpha,V}(hv) = \sum \alpha(g)g(hv)$. Cambiando a $g = hgh^{-1}$, tenemos por ser G-lineal. $\varphi_{\alpha,V}(hv) = \sum \alpha(hgh^{-1})hgh^{-1}(hv)$. $\varphi_{\alpha,V}(hv) = \sum \alpha(hgh^{-1})hg(v)$ cambiando $hgh^{-1} = g$ nos resulta $\varphi_{\alpha,V}(hv) = h(\sum \alpha(hgh^{-1})g(v))$ y dado que α es una función de clase $\varphi_{\alpha,V}(hv) = h(\sum \alpha(g)g(v))$, lo que es la definición de φ pero ahora con $\alpha v(v)$; lo que nos lleva a $\varphi_{\alpha,V}(hv) = h(\varphi_\alpha, V(v))$. Por lo tanto φ es un homomorfismo G-módulo.

$\square$

Proposición 2.13. *El número de representaciones irreducibles de G es igual al número de clases de conjugación de G. Equivalentemente sus caracteres $\{\chi_V\}$ forman una base ortonormal para $\mathbb{C}_{clase}(G)$.*

Demostración. Supongamos que $\alpha : G \to \mathbb{C}$ es una función de clase y $(\alpha, \chi_V) = 0$ para toda representación irreducible V, mostraremos que $\alpha = 0$. Consideramos el endomorfismo $\varphi_{\alpha,V} = \sum \alpha(g)g$. Por el lema de Schur, $\varphi_{\alpha,V} = \lambda \cdot Id$, y si $n = \dim V$, entonces

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{n} tr(\varphi_{\alpha,V}) \\
&= \frac{1}{n} \sum \alpha(g)\chi_V(g) \\
&= \frac{|G|}{n} \overline{(\alpha, \chi_{V^*})} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Entonces $\varphi_{\alpha,V} = 0$ ó $\sum \alpha(g)g = 0$ para cualquier representación V de G. Entonces $\alpha(g) = 0$. En particular, esta proposición es válida para la representación regular, es decir $V = R$.

$\square$

Capítulo 3

Las representaciones de $\mathbb{S}_4$

1. Descripción de $\mathbb{S}_4$

El grupo simétrico $\mathbb{S}_4$ es el grupo de las permutaciones de cuatro elementos $\{1,2,3,4\}$. El orden de este grupo es 24 y sus elementos son la identidad, 6 transposiciones, 8 3-ciclos, 6 4-ciclos y 3 productos de dos transposiciones disjuntas:

$$\mathbb{S}_4 = \left\{ \begin{array}{c} (1),(12),(13),(14),(23),(24),(34), \\ (123),(124),(132),(134),(142),(143),(234),(243), \\ (1234),(1243),(1324),(1342),(1423),(1432), \\ (12)(34),(13)(24),(14)(23). \end{array} \right\}$$

En cualquier grupo $\mathbb{S}_d$, las clases de conjugación corresponden a las particiones de d, es decir, a las expresiones de d como suma de enteros positivos $a_1, a_2, \cdots, a_k$; cada partición corresponde asociativamente a la clase de conjugación de una permutación que consiste de ciclos disjuntos de longitudes $a_1, ..., a_k$.

Es decir, si α y β están en $\mathbb{S}_d$, entonces

- $\alpha\beta\alpha^{-1}$ es una permutación que tiene la misma estructura de ciclo que β;
- α y $\beta \in \mathbb{S}_d$ son conjugadas en $\mathbb{S}_d$ si y solo si ellos tienen la misma estructura de ciclo.[**6**, teorema 3.10].

Con esto sabemos cuántos elementos tiene cada clase de conjugación. El grupo $\mathbb{S}_4$ está particionado en 5 clases de conjugación: la del elemento identidad (1) (su partición es $4 = 1 + 1 + 1 + 1$), la de las transposiciones (su partición es $4 = 2 + 1 + 1$); la de los 3-ciclos cuya partición es $4 = 3 + 1$; los 4-ciclos, con partición $4 = 4$; y los productos de 2 transposiciones disjuntas, cuya partición es $4 = 2 + 2$.

2. Representaciones Irreducibles de $\mathbb{S}_4$

Al igual que en el grupo $\mathbb{S}_3$ tenemos las siguientes tres representaciones:

- La representación trivial U, que está definida como $gv = v$ con $g \in \mathbb{S}_4$, $V = \mathbb{C}$; $(1)v = v, (12)v = v, (123)v = v, (1234)v = v, (12)(34)v = v$ y el caracter en cada clase de conjugación es 1.

- La representación alternante U', definida como $gv = \mathrm{sgn}(g)v$ con $g \in \mathbb{S}_4$, $v \in \mathbb{C}$; $(1)v = v, (12)v = -v, (123)v = v, (1234)v = -v, (12)(34)v = v$. Los caracteres en cada clase de conjugación son $1, -1, 1, -1, 1$, respectivamente.

- La representación estándar V, cociente de la representación de permutaciones asociada a la acción estándar de $\mathbb{S}_4$ en un conjunto de 4 elementos por la subrepresentación trivial. Recordemos que la representación de permutaciones está dada por $g(z_1, z_2, z_3, z_4) = z_{g^{-1}(1)}, z_{g^{-1}(2)}, z_{g^{-1}(3)}, z_{g^{-1}(4)}$.

  Entonces $V = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 : z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0\}$.

Proposición 3.1. *La representación estándar tiene una base* $\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ *tal que*

$$\begin{array}{ccc} \sigma\alpha = -\alpha & \sigma\beta = i\gamma & \sigma\gamma = i\beta \\ \tau\alpha = -\alpha & \tau\beta = i\gamma & \tau\gamma = -i\beta \\ \theta\alpha = -\alpha & \theta\beta = i\beta & \theta\gamma = i\gamma \end{array}$$

donde $\sigma = (12)(34),\ \tau = (14)(23),\ \theta = (1234).$

Demostración. Sea $V = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 : z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0\}$. Una base

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix},\ \gamma = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

genera a V, además de que α, β, γ deben ser linealmente independientes.

Que sean generadores quiere decir que para todo $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ existen $\lambda,\ \mu,\ \eta$ tales que

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos las ecuaciones $z_1 = -\lambda + i\mu - i\eta$, $z_2 = \lambda - \mu - \eta$, $z_3 = -\lambda - i\mu + i\eta$ y $z_4 = \lambda + \mu + \eta$; entonces $\lambda = \dfrac{-z_1 - z_3}{2}$, $\mu = \dfrac{iz_3 - z_3 - z_1 - iz_1}{4} - \dfrac{z_2}{2}$ y $\eta = \dfrac{-iz_3 + iz_1 - z_3 - z_1}{4} - \dfrac{z_2}{2}$.

Por lo tanto V es generado por $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

Para verificar que $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ son linealmente independietes, suponemos

$$\lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y mostraremos que $\lambda = \mu = \eta = 0$.

Tenemos cuatro ecuaciones:

1. $-\lambda + i\mu - i\eta = 0$,
2. $\lambda - i\mu - \eta = 0$,
3. $-\lambda - i\mu + i\eta = 0$ y
4. $\lambda + \mu + \eta = 0$.

De la ecuación 2 tenemos $\eta = \lambda - \mu$ y con la ecuación 4 nos resulta $2\lambda = 0$; entonces $\lambda = 0$. Ahora, de la ecuación 1, $\mu = -i\lambda + \eta$ la sustituimos en la ecuación 4, $\lambda + 2\eta - i\lambda = 0$ entonces como $\lambda = 0$ asi que $2\eta = 0$ entonces $\eta = 0$. En la ecuación 1 sustituimos el valor de λ y η entonces $\mu = 0$.

Por lo tanto α, β y γ son linealmente independientes y por lo tanto forman una base para V.

Ahora verificamos que se cumplan

$\sigma\alpha = -\alpha,\ \sigma\beta = -i\gamma,\ \sigma\gamma = i\beta$:

$$(12)(34)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\alpha$$

$$(12)(34)\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = -i\gamma.$$

$$(12)(34)\begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = i\beta.$$

$\tau\alpha = -\alpha,\ \tau\beta = i\gamma,\ \tau\gamma = -i\beta$:

$$(14)(23)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\alpha.$$

$$(14)(23)\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} = i\gamma.$$

$$(14)(23)\begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} = -i\beta.$$

$\theta\alpha = -\alpha,\ \theta\beta = -i\beta,\ \theta\gamma = i\gamma$:

$$(1234)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\alpha.$$

$$(1234)\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} = -i\beta.$$

$$(1234)\begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} = i\gamma.$$

□

Vemos como actúan otros elementos de $\mathbb{S}_4$ en α, β y γ:

$$(12)\alpha = (12)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1-i}{2}\beta + \frac{1+i}{2}\gamma$$

$$(12)\beta = (12)\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1+i}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta - \frac{i}{2}\gamma$$

$$(12)\gamma = (12)\begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1-i}{2}\alpha + \frac{i}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$$

$$(123)\alpha = (123)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1+i}{2}\beta + \frac{1-i}{2}\gamma$$

$$(123)\beta = (123)\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1+i}{2}\alpha - \frac{i}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$$

$$(123)\gamma = (123)\begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1-i}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{i}{2}\gamma$$

En esta base, la representación estándar de cada clase de conjugación de $\mathbb{S}_4$ tiene matrices:

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1+i & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(123) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

$$(1234) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$(12)(34) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

La suma de los cuadrados de las dimensiones de estas tres representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_4$ es $1+1+9=11$, entonces por ecuación 2.6 , aún nos faltan representaciones irreducibles por describir ya que $|\mathbb{S}_4|=24$.

- La representación $V^{'}=V\otimes U^{'}$. Si nos tomamos el producto tensorial de V, la representación estándar y $U^{'}$, la alternante, obtendremos $V^{'}=V\otimes U^{'}$. Por proposición 2.1 el caracter está dado por $\chi_{V'}=\chi_V\cdot\chi_{U'}$. Así que los caracteres de $V^{'}$ en cada clase de conjugación son: $3,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1$.
  Ahora comprobaremos que efectivamente esta representación es irreducible; es suficiente con mostrar que $|\chi_{V'}|=1$ por corolario 2.10.

$$\begin{aligned}
|\chi_{V'}| &= \frac{1}{24}\sum_{g\in\mathbb{S}_4}\overline{\chi_{V'}}\chi_{V'}\\
&= \frac{1}{24}(3\cdot 3+6(1\cdot 1)+8(0)+6(1\cdot 1)+3(1\cdot 1))\\
&= \frac{1}{24}(9+6+6+3)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $V^{'}$ es irreducible. Esta representación con la base $\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ está dada en cada clase de $\mathbb{S}_4$ por:

$$Id=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\otimes\operatorname{sgn}(Id)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(12)=\begin{pmatrix}0&1+i&\frac{1-i}{2}\\\frac{1-i}{2}&\frac{1}{2}&\frac{i}{2}\\\frac{1+i}{2}&\frac{-i}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\otimes\operatorname{sgn}(12)=\begin{pmatrix}0&-1-i&\frac{-1+i}{2}\\\frac{-1+i}{2}&\frac{-1}{2}&\frac{-i}{2}\\\frac{-1-i}{2}&\frac{i}{2}&\frac{-1}{2}\end{pmatrix}$$

$$(123)=\begin{pmatrix}0&\frac{1+i}{2}&\frac{1-i}{2}\\\frac{1+i}{2}&\frac{-i}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1-i}{2}&\frac{1}{2}&\frac{i}{2}\end{pmatrix}\otimes\operatorname{sgn}(123)=\begin{pmatrix}0&\frac{1+i}{2}&\frac{1-i}{2}\\\frac{1+i}{2}&\frac{-i}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1-i}{2}&\frac{1}{2}&\frac{i}{2}\end{pmatrix}$$

$$(1234) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \otimes \operatorname{sgn}(1234) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$(12)(34) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \otimes \operatorname{sgn}(12)(34) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

- La representación W. Es la representación estándar de $\mathbb{S}_3$ levantada a $\mathbb{S}_4$ vía $\mathbb{S}_4/\mathbb{V}$ donde $\mathbb{V} = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ es el subgrupo normal de Klein de $\mathbb{S}_4$.

  Este levantamiento está definido como: $\pi^*\rho(g) = \rho(\pi(g))$, donde $g \in \mathbb{S}_4$, ρ es la representación estándar de $\mathbb{S}_3$ y $\pi : \mathbb{S}_4 \to \mathbb{S}_3$ es la proyección de $\mathbb{S}_4$ sobre el cociente $\mathbb{S}_4/\mathbb{V} \cong \mathbb{S}_3$. $\pi(g) = g\mathbb{V}$, $\tilde{\rho}(g) = \rho(\pi(g))$.

  Para cada clase de conjugación de $\mathbb{S}_4$ la representación W se obtiene como: encontar $g = h \cdot v$ donde $g \in \mathbb{S}_4, h \in \mathbb{S}_3$ y $v \in \mathbb{V}$ para después $\pi^*\rho(g) = \rho(\pi(g))$ y así la representación W va a ser igual a la representación estándar de $\mathbb{S}_3$ por lo tanto el caracter también lo será. La base de W es:

  $$\alpha = \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} \text{ y } \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}.$$

  La clase de conjugación $[(1)]$. $(1) = (1) \cdot (1)$ entonces $\pi^*\rho(1) = \rho(1)$, $\pi^*(1) = \rho(\pi(1)) = \rho((1) \cdot (1)) = \rho(1)$, $\tilde{\rho}(1) = \rho(\pi(1)) = \rho(1)$.
  Por lo tanto $\chi_{\tilde{\rho}(1)} = \chi_{\rho(1)} = 2$.

  La clase de conjugación $[(12)]$. $(12) = (12) \cdot (1)$ entonces $\pi^*\rho(12) = \rho(12)$, $\pi^*\rho(12) = \rho(\pi(12)) = \rho((12) \cdot (1) = \rho(12)$, $\tilde{\rho}(12) = \rho(\pi(12)) = \rho((12) \cdot (1)) = \rho(12)$.
  Entonces $\chi_{\rho(12)} = \chi_{\tilde{\rho}(12)} = 0$.

La clase de conjugación $[(123)]$. $(123) = (123) \cdot (1)$ entonces $\pi^*\rho(123) = \rho(\pi(123)) = \rho((123) \cdot (1)) = \rho(123)$, $\rho(\tilde{123}) = \rho(\pi(123)) = \rho((123) \cdot (1)) = \rho(123)$.

Entonces $\chi_{\rho(123)} = \chi_{\tilde{\rho}(123)} = -1$.

La clase de conjungación $[(1234)]$. $(1234) = (13) \cdot (12)(34)$ entonces $\pi^*\rho(1234) = \rho(13)$, $\pi^*\rho(1234) = \rho(\pi(1234)) = \rho((1234) \cdot (12)(34)) = \rho(13)$, $\tilde{\rho}(1234) = \rho(\pi(1234)) = \rho((1234) \cdot (12)(34)) = \rho(13)$.

Entonces $\chi_{\rho(13)} = \chi_{\tilde{\rho}(1234)} = 0$.

La clase de conjugación de $[(12)(34)]$. $(12)(34) \cdot (1) = (12)(34)$ entonces $\pi^*\rho((12)(34)) = \rho(1)$, $\pi^*\rho((12)(34)) = \rho(\pi((12)(34))) = \rho(1)$. $\tilde{\rho}(12)(34) = \rho(\pi((12)(34))) = \rho((12)(34)) \cdot (12)(34)) = \rho(1)$.

Entonces $\chi_{\rho(1)} = \chi_{\tilde{\rho}(12)(34)} = 2$.

2.1. Tabla de caracteres de $\mathbb{S}_4$. Recopilando los caracteres de las cinco representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_4$ obtenemos la tabla de caracteres.

	1	6	8	6	3
$\mathbb{S}_4$	$[(1)]$	$[(12)]$	$[(123)]$	$[(1234)]$	$[(12)(34)]$
trivial$U$	1	1	1	1	1
alternanteU'	1	-1	1	-1	1
estándar$V$	3	1	0	-1	-1
$V' = V \otimes U'$	3	-1	0	1	-1
W	2	0	-1	0	2

Capítulo 4

El grupo de movimientos rígidos de un cubo

El grupo de movimientos rígidos de un cubo es el grupo simétrico $\mathbb{S}_4$, que actúa en el cubo en sus cuatro diagonales principales. $\mathbb{S}_4$ actúa además en el conjunto de caras, vértices y aristas del cubo. En este capítulo se describirán las representaciones de $\mathbb{S}_4$ bajo estas acciones.

El cubo está formado por: vértices, diagonales, caras y aristas. Los cuales se describirán a partir de otros para simplificar notación.

- Ocho vértices: los denotaremos sólo con los números árabigos del 1 al 8 respectivamente. Como se muestra en la figura 1 los cuatro primeros definen a las diagonales principales del cubo; 1, 2, 3, 4, están situados en la cara de enfrente, en cambio el 5, 6, 7, 8 están en la cara opuesta.

- Cuatro diagonales principales: las llamaremos sólo por los números romanos del I, II, III, IV respectivamente. Las diagonales son las rectas que se forman al unir los vértices opuestos; I es la recta formada del 1 al 8, II es la recta formada del 2 al 7, III es la recta formada del 3 al 6; IV es la recta formada del 4 al 5.

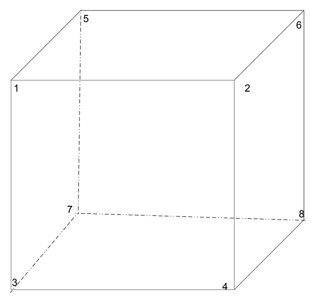

Figura 1. Vértices del cubo.

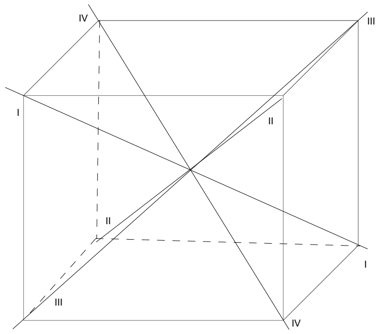

Figura 2. Diagonales del cubo.

- Seis caras: las nombraremos como C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6. las caras están formadas por el ciclo de los vértices que dan comienzo a las diagonales, con orientación positiva; C_1 esta formada por el ciclo de vértices (1342) que en diagonales es $I\ III\ IV\ II$, C_2 está formada por el ciclo de los vértices (1573) que en las diagonales es $I\ IV\ II\ III$, C_3 está formada por el ciclo de los vértices (8756) que en las diagonales queda $I\ II\ IV\ III$, C_4 está formada por el ciclo de los vértices (8624) que en las diagonales queda $I\ III\ II\ IV$, C_5 está formada por el ciclo de vértices (1265) que en diagonales es $I\ II\ III\ IV$ y C_6 está formada por el ciclo de vértices (8437) que en diagonales queda como $I\ IV\ III\ II$.

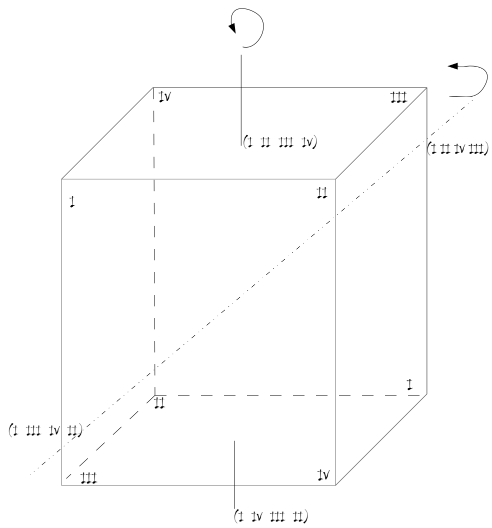

Figura 3. Caras del cubo.

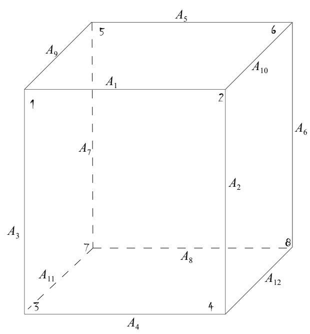

Figura 4. Aristas del cubo.

- Doce aristas: las llamaremos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12} respectivamente. Las aristas son las rectas que se forman al unir los vértices adyacentes; A_1 es la recta formada por el vértice 1 al 2, A_2 es la recta formada por el vértice 2 al 4, A_3 es la recta formada por el vértice 1 al 3, A_4 es la recta formada por el vértice 3 al 4, A_5 es la recta formada por el vértice 5 al 6, A_6 es la recta formada por el vértice 6 al 8, A_7 es la recta formada por el vértice 5 al 7, A_8 es la recta formada por el vértice 8 al 7, A_9 es la recta formada por el vértice 1 al 5, A_{10} es la recta formada por el vértice 2 al 6, A_{11} es la recta formada por el vértice 3 al 7; A_{12} es la recta formada por el vértice 4 al 8.

1. Isomorfismo de los movimientos del cubo con $\mathbb{S}_4$.

Teorema 4.1. *El grupo de movimientos rígidos del cubo es isomorfo a* $\mathbb{S}_4$.

Demostración. Sea G el grupo de movimientos rígidos del cubo, el cual es generado por las rotaciones de los ejes que unen centros de las caras opuestas C_1 con C_3 y C_5 con C_6, como se muestra en la figura 5.

Definimos el homomorfismo $\psi : G \longrightarrow \mathbb{S}_4$, llamamos σ la rotación de la C_1 con C_3 y ρ la rotación de C_5 con C_6. Aplicando el homomorfismo ψ a σ y ρ obtenemos $\psi(\sigma) = (I, III, IV, II)$, $\psi(\rho) = (I, II, III, IV)$.

Sabemos que (I, II) y (I, II, III, IV) son generadores de $\mathbb{S}_4$ por [**8**, proposición 4.15] así que para mostrar que ψ es sobreyectivo, es suficiente con mostrar que (I, II) es generado por $\psi(\sigma) = (I, III, IV, II)$ y $\psi(\rho) = (I, II, III, IV)$.

Pero $(I, III, IV, II)(I, II, III, IV)(I, III, IV, II) = (I, II)$ o lo que es lo mismo $\psi(\sigma)\psi(\rho)\psi(\sigma) = (I, II)$.

Con esto se muestra que ψ alcanza todos los valores en $\mathbb{S}_4$, por lo tanto ψ es sobreyectivo. Como conclusión ψ es inyectiva porque toma un único valor es $\mathbb{S}_4$ así que ψ da un isomorfismo entre G el grupo de movimientos rígidos del cubo y $\mathbb{S}_4$.

$\square$

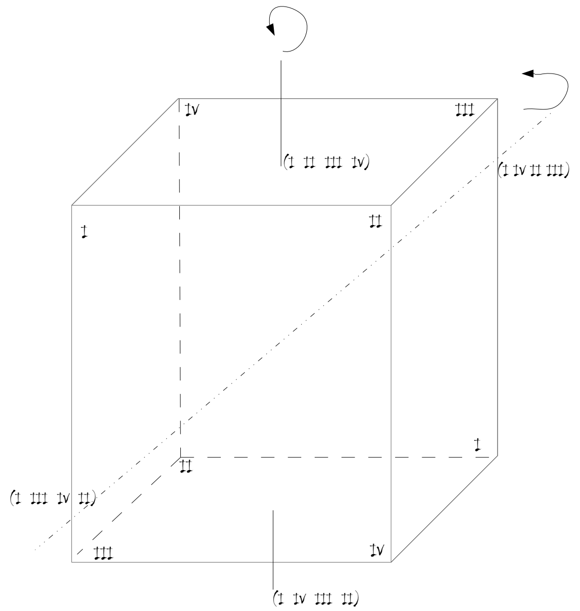

Figura 5. Ejes de rotación de C_1 con C_3, C_2 con C_4, C_5 con C_6.

2. Representaciones de las permutaciones de las caras.

$\mathbb{S}_4$ actúa permutando las seis caras del cubo. Al tener esta acción se tendrá la representación de permutaciones de $\{C_1, \cdots, C_6\}$ la cual llamaremos p y le aplicaremos los conceptos del capitulo 2 para describir completamente esta representación.

Los generadores de $\mathbb{S}_4$ son $\sigma = (I, II)$ $\tau = (I, II, III, IV)$ estos generadores accionados en el conjunto de caras dan: σ a $(C_1C_5)(C_2C_4)(C_3C_6)$, τ a $(C_2C_5C_4C_6)$. Asi los elementos de $\mathbb{S}_4$ están contenidos en $\mathbb{S}_6$.

Recordemos que si un grupo G actúa en un conjunto finito X, además tenemos un espacio vectorial V con una base e_x, existe un mapeo lineal p de V a V el cual envia e_x a e_{sx} entonces definimos a p como la representación de permutaciones asociada a X.

Llamamos a p la representación de permutaciones asociada a la acción de $\mathbb{S}_4$ en las caras de cubo. El grupo de movimientos rígidos del cubo induce a $\varphi : \mathbb{S}_4 \longrightarrow \mathbb{S}_6$.

En la clase (I): la cara 1 va a la 1, la 2 va a la 2, la 3 va a la 3, la 4 va a la 4, la 5 va a la 5 y la 6 va a la 6; es decir deja las 6 caras fijas.

En la clase (I, II): C_1 va a C_5, C_2 va a C_4, C_3 va a C_6, C_4 va a C_2, C_5 va a C_1 y C_6 va a C_3; $(I, II) \longrightarrow (C_1C_5)(C_2C_4)(C_3C_6)$.

En la clase (I, II, III): C_1 va a C_6, C_2 va a C_3, C_3 va a C_5, C_4 va a C_1, C_5 va a C_2 y C_6 va a C_4; $(I, II, III) \longrightarrow (C_1C_6C_4)(C_2C_3C_5)$.

En la clase (I, II, III, IV): C_1 va a C_4, C_2 va a C_1, C_3 va a C_2, C_4 va a C_3, C_5 va a C_5 y C_6 va a C_6; $(I, II, III, IV) \longrightarrow (C_1C_4C_3C_2)$.

En la clase $(I, II)(III, IV)$: C_1 va a C_3, C_2 va a C_2, C_3 va a C_1, C_4 va a C_4, C_5 va a C_6 y C_6 va a C_5; $(I, II)(III, IV) \longrightarrow (C_1C_3)(C_5C_6)$.

Por proposición 2.5 $\chi_p(g)$ es el número de elementos de las caras del cubo fijadas por $g \in \mathbb{S}_4$. Los caracteres de p son: $\chi_p(1) = 6$, $\chi_p(12) = 0$, $\chi_p(123) = 0$, $\chi_p(1234) = 2$ y $\chi_p(12)(34) = 2$.

Cualquier representación se puede descomponer como la suma directa de representaciones irreducibles; entonces

$$p = U^{a_1} \oplus (U')^{a_2} \oplus V^{a_3} \oplus (V')^{a_4} \oplus W^{a_5}.$$

Si calculamos (χ_p, χ_p), sabremos por cuantas representaciones irreducibles esta formada p;

$$\begin{aligned}
(\chi_p, \chi_p) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi}_p(g) \chi_p(g) \\
&= \frac{1}{24}(1(6 \cdot 6) + 6(0 \cdot 0) + 8(0 \cdot 0) + 6(2 \cdot 2) + 3(2 \cdot 2)) \\
&= \frac{1}{24}(36 + 24 + 12) \\
&= \frac{1}{24}(72) \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Para conocer la multiplicidad a_i calculamos (χ_p, χ_U), $(\chi_p, \chi_{U'})$, (χ_p, χ_V), $(\chi_p, \chi_{V'})$ y (χ_p, χ_W); asi veremos cuales son las representaciones irreducibles que aparecen en p.

$$\begin{aligned}(\chi_p, \chi_U) &= \frac{1}{24}(1(6\cdot 1) + 6(0\cdot 1) + 8(0\cdot 1) + 6(2\cdot 1) + 3(2\cdot 1)) \\ &= \frac{1}{24}(6 + 12 + 6) \\ &= 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\chi_p, \chi_{U'}) &= \frac{1}{24}(1(6\cdot 1) + 6(0\cdot -1) + 8(0\cdot 1) + 6(2\cdot -1) + 3(2\cdot 1)) \\ &= \frac{1}{24}(6 - 12 + 6) \\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\chi_p, \chi_V) &= \frac{1}{24}(1(6\cdot 3) + 6(0\cdot 1) + 8(0\cdot 0) + 6(2\cdot -1) + 3(2\cdot -1)) \\ &= \frac{1}{24}(6 - 12 + 6) \\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\chi_p, \chi_{V'}) &= \frac{1}{24}(1(6\cdot 3) + 6(0\cdot -1) + 8(0\cdot 0) + 6(2\cdot 1) + 3(2\cdot -1)) \\ &= \frac{1}{24}(18 + 12 - 6) \\ &= 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\chi_p, \chi_W) &= \frac{1}{24}(1(6\cdot 2) + 6(0\cdot 0) + 8(0\cdot -1) + 6(2\cdot 0) + 3(2\cdot 2)) \\ &= \frac{1}{24}(12 + 12) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Como $(\chi_p, \chi_U) = (\chi_p, \chi_{V'}) = (\chi_p, \chi_W) = 1$; U, V' y W por el teorema 1.4 y proposición 1.6 son las únicas representaciones irreducibles que tiene la representación de permutaciones asociada al conjunto de caras por lo tanto p se descompone como

$$p = U \oplus V' \oplus W \tag{4.1}$$

además $\chi_p(1) = 6 = \dim p = 1 + 3 + 2$.

3. Representaciones de las permutaciones de los vértices.

$\mathbb{S}_4$ actúa permutando los ocho vértices del cubo. Al tener esta acción se tendrá la representación de permutaciones de $\{1, \cdots, 8\}$ bajo la acción de $\mathbb{S}_4$ que al igual que en el conjunto de caras la llamaremos q y seguiremos el mismo procedimiento para conocer todo acerca de ésta representación.

Los generadores de $\mathbb{S}_4$ son $\sigma = (I, II)$, $\tau = (I, II, III, IV)$ estos generadores accionados en el conjunto de vertices dan: σ a (12)(36)(45)(78), τ a (1265)(3487). Asi elementos de $\mathbb{S}_4$ estan contenidos en $\mathbb{S}_8$.

Se tomara solo el representante de cada clase de conjugación para ver que $\mathbb{S}_4$ es inducido a $\mathbb{S}_8$ y calcular los caracteres de la representación de permutaciones asociada a la acción de $\mathbb{S}_4$ en los vértices del cubo llamada q.

- (I) deja todo fijo.
- (I, II) va a (12)(36)(45)(78).
- (I, II, III) es enviado a (176)(238).
- (I, II, III, IV) es enviado a (1265)(3487).
- $(I, II)(III, IV)$ es enviado a (17)(28)(35)(46).

Por la proposición 2.5 $\chi_q(g)$ es el número de elementos de los vértices del cubo fijados por $g \in \mathbb{S}_4$, entonces los caracteres en cada clase de conjugación son: $\chi_q(1) = 8$, $\chi_q(12) = 0$, $\chi_q(123) = 2$, $\chi_q(1234) = 0$ y $\chi_q(12)(34) = 0$.

Cualquier representación se puede descomponer como la suma directa de representaciones irreducibles; entonces

$$q = U^{a_1} \oplus (U')^{a_2} \oplus V^{a_3} \oplus (V')^{a_4} \oplus W^{a_5}.$$

Si calculamos (χ_q, χ_q), sabremos por cuantas representaciones irreducibles esta formada q;

$$\begin{aligned}
(\chi_q, \chi_q) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi}_q(g)\chi_q(g) \\
&= \frac{1}{24}(1(8 \cdot 8) + 6(0 \cdot 0) + 8(2 \cdot 2) + 6(0 \cdot 0) + 3(0 \cdot 0)) \\
&= \frac{1}{24}(96) \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Para conocer la multiplicidad a_i calculamos (χ_q, χ_U), $(\chi_q, \chi_{U'})$, (χ_q, χ_V), $(\chi_q, \chi_{V'})$ y (χ_q, χ_W); asi veremos cuales son las representaciones irreducibles que aparecen en q.

$$\begin{aligned}
(\chi_q, \chi_U) &= \frac{1}{24}(1(8 \cdot 1) + 6(0 \cdot 1) + 8(2 \cdot 1) + 6(0 \cdot 1) + 3(0 \cdot 1)) \\
&= \frac{1}{24}(8 + 16) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\chi_q, \chi_{U'}) &= \frac{1}{24}(1(8 \cdot 1) + 6(0 \cdot -1) + 8(2 \cdot 1) + 6(0 \cdot -1) + 3(0 \cdot 1)) \\
&= \frac{1}{24}(8 + 16) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\chi_q, \chi_V) &= \frac{1}{24}(1(8 \cdot 3) + 6(0 \cdot 1) + 8(2 \cdot 0) + 6(0 \cdot -1) + 3(0 \cdot -1)) \\
&= \frac{1}{24}(24) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\chi_q, \chi_{V'}) &= \frac{1}{24}(1(8 \cdot 3) + 6(0 \cdot -1) + 8(2 \cdot 0) + 6(0 \cdot 1) + 3(0 \cdot -1)) \\
&= \frac{1}{24}(24) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\chi_q, \chi_W) &= \frac{1}{24}(1(8\cdot 2) + 6(0\cdot 0) + 8(2\cdot -1) + 6(0\cdot 0) + 3(0\cdot 2))\\ &= \frac{1}{24}(16-16)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Son únicas las que tengan su producto interno igual a 1, por lo tanto q tiene una descomposición

$$q = U \oplus U^{'} \oplus V \oplus V^{'} \tag{4.2}$$

por el teorema 1.4 y la proposición 1.6 tenemos

$$\dim q = 1+1+3+3 = 8 = \chi_q(1).$$

4. Representaciones de las permutaciones de las aristas.

$\mathbb{S}_4$ actúa permutando las doce aristas del cubo. Al tener esta acción se tendrá la representación de permutaciones de $\{A_1, \cdots, A_{12}\}$ bajo la acción en $\mathbb{S}_4$. La que llamaremos r y procederemos al igual que en los otros dos conjuntos (caras y vértices) para conocer todo acerca de ésta representación.

Los generadores de $\mathbb{S}_4$ son $\sigma = (I, II)$, $\tau = (I, II, III, IV)$ estos generadores accionados en el conjunto de aristas dan: σ a $(A_2A_9)(A_3A_{10})(A_4A_5)(A_6A_{11})(A_7A_{12})$, τ a $(A_1A_{10}A_5A_9)(A_2A_6A_7A_3)(A_4A_{12}A_8A_{11})$.

Solo se tomará el representante de cada clase de conjugación que tiene $\mathbb{S}_4$ para ver que $\mathbb{S}_4$ es inducido a $\mathbb{S}_{12}$ y así calcular los caracteres de la representación r que es la asociada a la acción de $\mathbb{S}_4$ en las aristas de cubo.

- (I) deja fijo las doce aristas.
- (I, II) manda a $(A_2A_9)(A_3A_{10})(A_4A_5)(A_6A_{11})(A_7A_{12})$, es decir, deja fijas a dos aristas la A_1 y A_8.
- (I, II, III) es enviado a $(A_1A_{11}A_6)(A_2A_4A_{12})(A_3A_8A_{10})(A_5A_9A_7)$ y no fijas a algúna arista.

- (I, II, III, IV) manda a $(A_1A_{10}A_5A_9)(A_2A_6A_7A_3)(A_4A_{12}A_8A_{11})$, es decir no deja fija a algúna arista.
- $(I, II)(III, IV)$ es enviado a $(A_1A_8)(A_2A_6)(A_3A_7)(A_5A_4)(A_9A_{11})(A_{10}A_{12})$ y no deja fija a algúna arista.

Por proposición 2.5 $\chi_r(g)$ es el número de las aristas del cubo fijadas por $g \in \mathbb{S}_4$. Los caracteres son: $\chi_r(1) = 12$, $\chi_r(12) = 2$, $\chi_r(123) = 0$, $\chi_r(1234) = 0$ y $\chi_r(12)(34) = 0$.

Cualquier representación se puede descomponer como la suma directa de representaciones irreducibles; entonces

$$r = U^{a_1} \oplus (U^{'})^{a_2} \oplus V^{a_3} \oplus (V^{'})^{a_4} \oplus W^{a_5}.$$

Si calculamos (χ_r, χ_r), sabremos por cuantas representaciones irreducibles esta formada r;

$$\begin{aligned}
(\chi_r, \chi_r) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi}_r(g)\chi_r(g) \\
&= \frac{1}{24}(1(12\cdot 12) + 6(2\cdot 2) + 8(0\cdot 0) + 6(0\cdot 0) + 3(0\cdot 0)) \\
&= \frac{1}{24}(168) \\
&= 7.
\end{aligned}$$

Como $(\chi_r, \chi_r) = 7$ tenemos siete representaciones irreducibles pero $\mathbb{S}_4$ solo tiene 5 representaciones irreducibles, r es la suma de estas representaciones irreducibles y una de ellas se van a repetir. Tomando los caracteres de las representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_4$, calculamos (χ_p, χ_U), $(\chi_p, \chi_{U'})$, (χ_p, χ_V), $(\chi_p, \chi_{V'})$ y (χ_p, χ_W) para conocer la multiplicidad de las representaciones que aparecen en r.

$$\begin{aligned}
(\chi_r, \chi_U) &= \frac{1}{24}(12(1) + 6(2\cdot 1) + 8(0\cdot 1) + 6(0\cdot 1) + 3(0\cdot 1)) \\
&= \frac{1}{24}(12 + 12) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\chi_r, \chi_{U'}) &= \frac{1}{24}(1(12 \cdot 1) + 6(2 \cdot -1) + 8(0 \cdot 1) + 6(0 \cdot -1) + 3(0 \cdot 1)) \\
&= \frac{1}{24}(12 - 12) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\chi_r, \chi_V) &= \frac{1}{24}(12(3) + 6(2 \cdot 1) + 8(0 \cdot 0) + 6(0 \cdot -1) + 3(0 \cdot -1)) \\
&= \frac{1}{24}(36 + 12) \\
&= 2. \textit{ V tiene múltiplicidad } 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\chi_r, \chi_{V'}) &= \frac{1}{24}(12(3) + 6(2 \cdot -1) + 8(0 \cdot 0) + 6(0 \cdot 1) + 3(0 \cdot -1)) \\
&= \frac{1}{24}(36 - 12) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\chi_r, \chi_W) &= \frac{1}{24}(12(2) + 6(2 \cdot 0) + 8(0 \cdot -1) + 6(0 \cdot 0) + 3(0 \cdot 2)) \\
&= \frac{1}{24}(24) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Como $(\chi_r, \chi_U) = (\chi_r, \chi_{V'}) = (\chi_r, \chi_W) = 1$ por el teorema 1.4 y proposición 1.6; U, V, V' y W son las únicas representaciones irreducibles que tiene la representación de permutaciones asociada al conjunto de aristas por lo tanto r se descompone como

$$r = U \oplus V^{\oplus 2} \oplus V' \oplus W. \tag{4.3}$$

además $\chi_r(1) = 12 = \dim r = 1 + 6 + 3 + 2$.

Conclusiones

Las representaciones de un grupo son homomorfismos que se llevan a su forma matricial donde son más sencillos de interpretar.

La teoría de representaciones de grupos finitos tiene diversas aplicaciones. En este proyecto, estudiamos una aplicación geométrica.

Hemos estudiado al cubo con la ayuda de sus conjuntos: las caras, los vértices y las aristas; elaborando ejes de rotación con los cuales se mostró el isomorfismo entre el grupo simétrico $\mathbb{S}_4$ y precisamente el grupo de los movimientos rígidos del cubo. Así es con estos conjuntos y las acciones con $\mathbb{S}_4$ como se hacen homomorfismos o mejor dicho se llega a la representación de permutaciones con cada conjunto, y a su vez esta es interpretada con las representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_4$.

En esta tesis se procedió de manera similar a la de Félix Klein, pasar de la geometría de un objeto matemático a el álgebra lineal y más aún a la teoría de grupos para llegar a tener las representaciones de dicho objeto: el cubo.

Bibliografía

[1] Berndt Rolf. *Representations of linear groups*. Vieweg, 2007.

[2] Fulton William, Harris Joe. *Representation theory : a first course*. Springer Science, 1991.

[3] Halmos Paul R. *Finite-Dimensional Vector Spaces*. Springer, 1987.

[4] Hungerford Thomas W. *Abstract algebra : an introduction*. Saunders College Publishing, 1997.

[5] Lang Serge. *Álgebra Lineal*. Fondo Educativo Interamericano, 1976.

[6] Rotman Joseph J. *The theory of groups. An introduction*. Allyn and Bacon. Inc. 1976.

[7] Serre Jean-Pierre . *Linear Representations of Finite Groups*. Springer Science, 1977.

[8] Zaldívar Felipe. *Introducción a la teoría de Grupos*. Sociedad Matemática Mexicana, 2006.